Eksempel 1 Lengde av et opphengt kjede (kjedlikningen / Catenaries)

Det skal finnes 1. lengden av kjedet, den horisontale lasten i bunnpunktet $\left(\frac{dy}{dx}=0\right)$ og 2. den maksimale (tangensielle) lasten på toppen av B. Har opplyst at:

$$d:=20\ m \qquad w:=50\ \frac{N}{m} \qquad L:=100\ m \qquad x:=\frac{L}{2}=50\ m$$

1. Lengden av kjedet

Har at, $y(x)=a\cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, så da må venstre side være lik høyre side.

Har $y(50\ m)=a+d=a\cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Deler med a på begge sider og får $1+\frac{d}{a}=cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

Gjør en steppvis balansering:

$$a:=20\ m \qquad 1+\frac{d}{a}=2 \qquad \cosh\left(\frac{x}{a}\right)=6.132$$

$$a:=40\ m \qquad 1+\frac{d}{a}=1.5 \qquad \cosh\left(\frac{x}{a}\right)=1.888$$

$$a:=65\ m \qquad 1+\frac{d}{a}=1.308 \qquad \cosh\left(\frac{x}{a}\right)=1.311$$

$$a:=65.45\ m \qquad 1+\frac{d}{a}=1.306 \qquad \cosh\left(\frac{x}{a}\right)=1.306$$

Finner at $a=65.45\ m$ er en løsning.

En greiere måte å regne ut a på er vha. bitte litt programmering (while-løkke):

$$a_p:=\left\|\begin{array}{l} a\leftarrow 1\ m \\ x\leftarrow 50\ m \\ d\leftarrow 20\ m \\ \text{while } b\le c \\ \quad\left\|\begin{array}{l} b\leftarrow \frac{d}{a}+1 \\ c\leftarrow \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ u\leftarrow (c-b) \\ a\leftarrow a+1.01\ m \end{array}\right. \\ a-1\ m \end{array}\right. =65.65\ m$$

Finner at $a_p=65.65\ m$ er en løsning.

Lengden av kjedet over hele L i.e. over $2\ x$, er $s:=2\left(a\cdot\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right)=110.01\ m$

1. Den maksimale tangensielle lasten på toppen av B.

Den horisontale lasten ved $\left(\dfrac{dy}{dx}=0\right)$ er, $T_0 := a\ w = 3.273\ kN$

Pålhøydene A og B er, $y_B := a + d = 85.5\ m$ $(y_A := y_B)$ $y_B := \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{s}{2}\right)^2} = 85.5\ m$

Den maksimale lasten i toppen av B er, $T_{max} := w\ y_B = 4.275\ kN$ eller $T_{max} := w\ (a+d)$
eller $T_{max} := w \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{s}{2}\right)^2} = 4.275\ kN$

Grafisk sett: