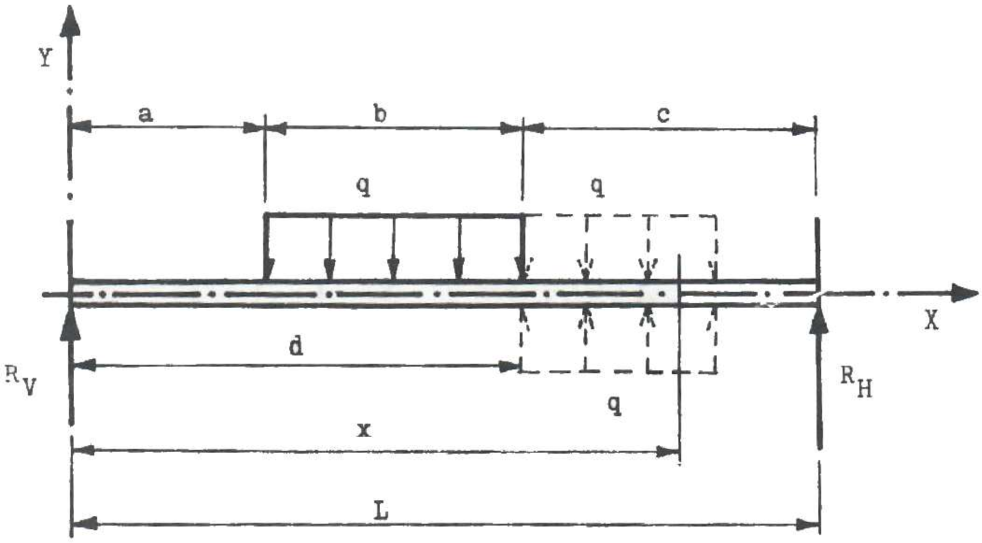
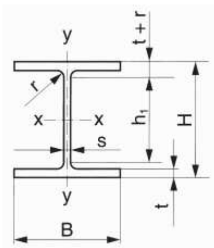
Eksempel 4: Fritt opplagret bjelke - Macaulay's betegnelser

Fritt opplagret bjelke - i begge ender, men det kunne selvfølgelig vært diletasjon i en av endene. Ved bruk av Macauleys betegnelser skal vi finne bjelkens vinkel ρ ved x og tilsvarende, nedbøyningene y_1 ved x_1 ved jevnt fordelt last på et stykke av bjelken men IKKE inntil en av endene.



Figur E401. HEB 500 - bjelke med jevnt fordelt last et stykke av bjelken.

Følgende data er gitt om bjelken samt om belastning:



Bjelkens total lengde: $L := 12\ m$

Bjelkens arealtreghets moment: $I := 107200\ cm^4$, om x-aksen

Elastisitetsmodul / Young modulus: $E := 2.05 \cdot 10^5\ MPa$

Avstand 1: $a := 4\ m$ Belastning (jevn last): $m_H := 187\ \dfrac{kg}{m}$

Avstand 2: $b := 4\ m$ => $q_H := m_H \cdot g = 1.8\ \dfrac{kN}{m}$

Avstand 3: $c := L - (a + b) = 4\ m$

Avstand 4: $d := a + b = 8\ m$

Finner først opplagerkreftene:

$$M_A = 0\ \therefore\quad R_V \cdot L - (q_H \cdot b) \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \quad => \quad R_V := \frac{(q_H \cdot b) \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)}{L} = 3.7\ kN$$

$$\Sigma k_Y = 0\ \therefore\quad R_H + R_V - q_H \cdot b = 0 \quad => \quad R_H := q_H \cdot b - R_V = 3.7\ kN$$

Ønsker å finne vinkel og nedbøyning i punktet $x := 8.5\ m$.

Merk: Videre finnes momentet om punktet x på bjelken. Legg merke til at legger til og trekker fra område c som en jevn belastning som er der, men som ikke er der. Dette gjøres kort og godt fordi matematikken blir langt enklere å håndtere enn hvis vi hadde latt være.

Har momentet om x

$$M_x = 0 \ \therefore \quad R_V\, x - \frac{q_H (x-a)^2}{2} + \frac{q_H (x-d)^2}{2} = 0$$

En vet at $\frac{M_x}{EI} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y^2$. Med uttrykket for M_x innsatt oppnås,

$$EI\, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y^2 = R_V\, x - \frac{q_H (x-a)^2}{2} + \frac{q_H (x-d)^2}{2} \tag{1}$$

Integrerer først (1):

$$EI \int \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y^2\, \mathrm{d}x = \int \left(R_V\, x - \frac{q_H (x-a)^2}{2} + \frac{q_H (x-d)^2}{2} \right) \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$EI\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = \frac{R_V\, x^2}{2} - \frac{q_H (x-a)^3}{6} + \frac{q_H (x-d)^3}{6} + A$$

Deretter (2):

$$EI \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{R_V\, x^2}{2} - \frac{q_H (x-a)^3}{6} + \frac{q_H (x-d)^3}{6} + A \right) \mathrm{d}x$$

$$EIy = \frac{R_V\, x^3}{6} - \frac{q_H (x-a)^4}{24} + \frac{q_H (x-d)^4}{24} + Ax + B \tag{3}$$

Integrasjonsbetingelsene er som følger, $x = 0$ idet $y = 0$ og $x = L$ idet $y = 0$.

Ser at ved $x = 0$ og $y = 0$ så er $B = 0$

Grensebetingelse 2 i.e. $x = L$ ved $y = 0$ og gir

$$EIy = 0 = \frac{1}{6} \left(R_V\, L^3 - \frac{q_H (L-a)^4}{4} + \frac{q_H (L-d)^4}{4} \right) + 6\ AL + 0 = 0$$

Finner at integrasjonskonstanten

$$A := \frac{1}{6 \cdot L} \left(\frac{q_H \cdot (L-a)^4}{4} - \frac{q_H \cdot (L-d)^4}{4} - R_V\ L^3 \right) = -63.6\ \boldsymbol{kN \cdot m^2}$$

Vinkel ved avstand x er

$$\rho := \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \left(3\ R_V\ x^2 - q_H \cdot (x-a)^3 + q_H \cdot (x-d)^3 + 6\ A \right) = 0.011\ \boldsymbol{deg}$$

Nedbøyning ved x er

$$y := \frac{1}{6 \cdot E \cdot I} \left(R_V\ x^3 - \frac{q_H \cdot (x-a)^4}{4} + \frac{q_H \cdot (x-d)^4}{4} + 6\ A \cdot x \right) = -0.89\ \boldsymbol{mm}$$

Tre (3) betingelser for bruk av Macauleys betegelser:

- Parentesen skal IKKE løses opp, men benyttes i matematikken slik den står.
- Verdien av x skal ALLTID være forbi siste last på bjelken.
- Hvis man søker x et sted FØR siste eller nest siste last for den sakens skyld, så vil det bety at parentesen(e) er negativ(e) for x. I så fall skal den eller de ikke tas med i utregningen. Den eller de leddene skal sløyfes!
- Har parentesen verdien 0 for x så skal den heller ikke tas med i utregningen selv om det er en logisk konsekvens $\left(P_i \cdot 0 = 0\right)$. Den eller de leddene skal sløyfes!