Jordflukthastighet / Escape velocity from Earth

Hvilken hastighet er f.eks. et romfartøy nødt til å oppnå for å forlate jorden eller bare gå i en bane rundt jorden. Hva er en partikkels nødvendige omløpshastighet og ikke minst, hvilken permanent hastighet holder satelitter i bane? Dette er flere spørsmål det er ganske enkelt å svare på. Imidlertid, hva som holder satellitter i bane er en funksjon av hvilken radius eller avstand fra jordens overflate en ønsker at de skal ha. Et eksempel er ISS - International Space Station. Den holder en konstant høyde over jordens overflate i gjennomsnitt på $h_{ISS} := 400\ km$. Banen og hastigheten opprettholdes ved snå justeringer i hastigheten utført av små thrustere som sitter på kroppen til ISS.

Jordens diameter er $d_j := 12742\ km$ hvilket tilsvarer en radius på $r_j := \frac{d_j}{2} = 6371\ km$.

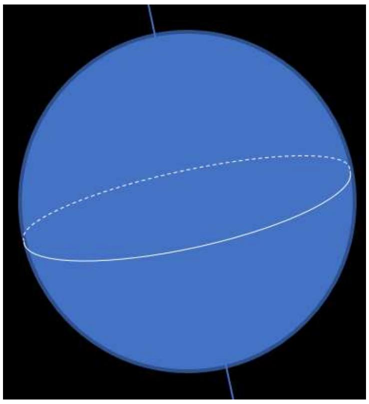
Jordas masse er ca. $m_j := 5.972 \cdot 10^{24}\ kg$

Den generelle gravitasjonskonstanten er, $G := 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Gravitasjonen beregnes som,

$$F = m_p \cdot g \;\; => \;\; g = \frac{F}{m_p} = \frac{\left(\frac{G \cdot m_p \cdot m_j}{r_j^{\ 2}}\right)}{m_p} = \frac{G \cdot m_p \cdot m_j}{r_j^{\ 2} \cdot m_p} \;\; => \;\; g := \frac{G \cdot m_j}{r_j^{\ 2}} = 9.82\ \frac{m}{s^2}$$

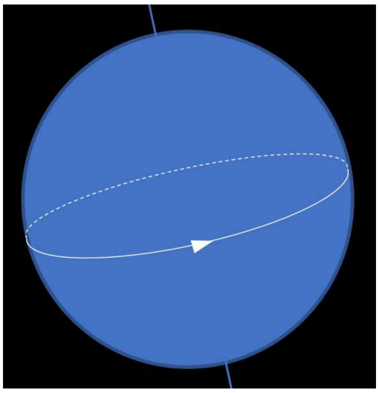
Omløpshastigheten til jorda



Jorda gjør ett omløp på $dgn := 24\ hr$. Jordens periferilengde er (ca.) $O_j := \pi \cdot d_j = 40030.2\ km$

Rotasjonshastigheten er da, $v_s := \frac{O_j}{dgn} = 1667.9\ \frac{km}{hr}$.

Partikkelens omløpshastighet for ikke falle til jordens overflate



En kan tenke seg en partikkel som går i bane rundt jorden akkurat i jordoverflatens gjennomsnittlige radius.

.

Har da at: $F_p = G\frac{m_p \cdot m_j}{r_j^{\ 2}} = \frac{m_p \cdot v_p^{\ 2}}{r_j} \;\; => \;\; G\frac{m_j}{r_j} = v_p^{\ 2}$

$$=> \;\; v_p := \sqrt{G\frac{m_j}{r_j}} = 7.91\ \frac{km}{s}.$$

Siden vi er ved jordens overflate her kan også dette uttrykket benyttes i.e. setter gravitasjonskraften lik sentrifugalhastigheten, i.e. $F_p = F_j$, $v_p := \sqrt{r_j\ g} = 7.91\ \frac{km}{s}$

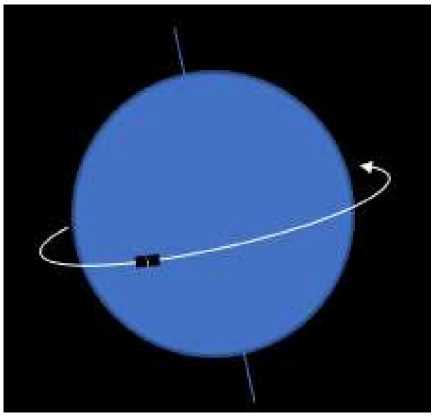
Omløpshastigheten til en geostasjonær satelitt

En geostasjonær satelitt holder seg helt stabilt en bane, som det ligger i ordet geostasjonær, helt "urørlig" over ett punkt på jorden og da på ekvator.

En kan tenke seg satelitten som går i bane rundt jorden akkurat i en høyde $h_S := 360\ km$ over jordens overflate, i.e. $v_S := \sqrt{G \dfrac{m_j}{r_j + h_S}} = 7.695\ \dfrac{km}{s}$.

Omløpshastigheten til romstasjonen ISS

Tilsvarende som for en geostasjonær satelitt holder ISS seg helt stabilt i en bane rundt jorden. En kan tenke seg en partikkel som går i bane rundt jorden akkurat i en høyde $h_{ISS} := 408\ km$. En regner da tilsvarende for som ved partikkelen over i.e.

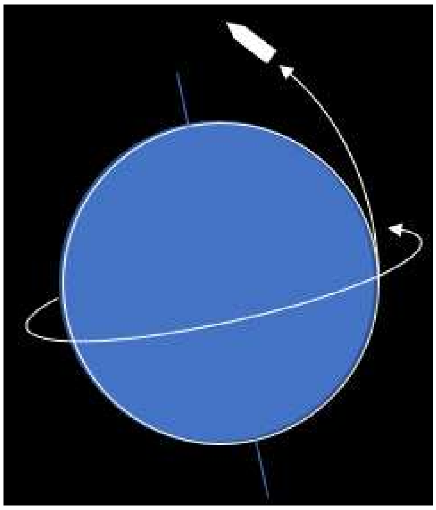


$$v_{ISS} := \sqrt{G \frac{m_j}{r_j + h_{ISS}}} = 7.668\ \frac{km}{s}.$$

Nå er det imidlertid slik at ISS fullfører $n_{dgn} := 16$ omløp rundt jorden pr. $dgn := 24\ hr$. Omløpsbanen til ISS er, $O_{ISS} := \pi \cdot (r_j + h_{ISS}) = 21296.9\ km$. Det igjen betyr en hastighet $v_{ISS} := \dfrac{O_{ISS} \cdot n_{dgn}}{dgn} = 14197.9\ \dfrac{km}{hr}$ og idet strekningen $s = v \cdot t$ så vil $t_{rev} := \dfrac{O_{ISS}}{v_{ISS}} = 90\ min$.

Jordfluktshastighet

Så til det store spørmålet, hvilken hastighet må en partikkel eller helst en romrakett ha for å kunne forlate jorden, altså jordflukthastigheten. For å besvare det kan det settes opp energilikninger for partikkelen, denne er,



$$\frac{1}{2} m_p v_0^2 + G \cdot \frac{m_j \cdot m_p}{r_j} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 + G \cdot \frac{m_j \cdot m_p}{r_r} \quad (1)$$

Som det fremgår regnes gravitasjonen inn mot jordas senter som negativ.

For å se hvilke ledd i likningen som teller må det settes opp betingelser for beregningen.

Diskusjon av betingelser:

1. Partikkelen har kinetisk energi idet den letter.
2. Partikkelen har potensiell energi på jordens overflate da den har en avstand r_j fra jordens sentrum.

3. Vi ser etter den minste oppskytningshastighet slik at partikkelen ikke har noen ekstra hastighet idet den har nådd sitt mål i.e. $v_p = 0$.

4. Avstanden fra jordas senter er så stor at vi kan sette $r_r = \infty$.

Det betyr at leddene på høyre side av uttrykket (1) er lik 0, slik at

Vi får da,

$$\frac{1}{2} m_p {v_0}^2 - G \cdot \frac{m_j \cdot m_p}{r_j} = 0 + 0 = 0$$

Setter over potensiell energi fra venstre side,

$$\frac{1}{2} m_p {v_0}^2 = G \cdot \frac{m_j \cdot m_p}{r_j}$$

og løser likningen mhp. v_0 samtidig som vi setter inn de ulike parameterne som inngår for å regne ut hastigheten,

$$v_0 := \sqrt{2\ G \cdot \frac{m_j}{r_j}} = 11.2\ \frac{km}{s}$$

Dette er altså hastigheten som skal til for å sende ut en partikkel i rommet. Det betyr også at den ikke får noe påfyll av energi underveis. Regnestykket tilsier også at partikkelen må ha oppnådd hastigheten umiddelbart.

En romrakett får jo ikke en slik hastighet umiddelbart og kan jo i virkeligheten gå så sakte så lenge $v_p > \frac{m}{s}$ og så lenge den klarer med kontinuerlig påfyll av energi.

Fin video av SpaceX Falcon 9 Dragon rakettoppskytning:

https://www.youtube.com/watch?v=TxBj8R7XKe4